

MATEMÁTICA

AZ *en*
EQUIPO

10

GUÍA PARA EL DOCENTE

AZ Editora s.a.

Esta es una obra colectiva, creada y diseñada por el Departamento Editorial de AZ Editora S.A. con la adaptación para Ecuador de Bermusi S.A.S.

Directora de Proyectos Educativos AZ Editora: Analía Rodano

Director Editorial Ecuador: Jesús Moreno
Coordinadora de Contenidos Ecuador: Marisleidys Llanes Rodríguez
Edición: Equipo Bermusi e Yrladis Rivas Bermudez
Corrección: Carlos Carcelén J.

Fotografías: Shutterstock

Autoría: Yrladis Rivas Bermudez (guía docente),
Alicia López y Claudia Marcela Pellet (libro del alumno)

Prohibida la reproducción total o parcial de este libro. Ninguna parte de esta obra puede ser almacenada, copiada o transmitida en forma alguna, sea electrónica o física, incluyendo su almacenamiento en sistemas de protección de información, sin el permiso escrito de AZ Editora S.A.

Primera edición: abril de 2023

ISBN del libro del docente: 978-9942-7083-7-3

© AZ Editora, 2023
www.AZ.com.ar

© Bermusi, 2023
Av. Granda Centeno Oe4 601 y Vasco de Contreras
Quito, Ecuador
Tel.: (593) 225 2198

E-mail: contacto@azeditora.com.ec
www.AZeditora.com.ec

   **AZeditoraEcuador**

Impreso en Ecuador en abril de 2023.

MATEMÁTICA

AZ en
EQUIPO

10

EGB

Presentación

¡Hola!

*Este es tu libro de **Matemática**. Te acompañará durante todo el año lectivo, al igual que a otros estudiantes que, como tú, cursan la Educación Básica Superior.*

Todas las situaciones de aprendizaje que encontrarás en las páginas de este libro están adaptadas a tu realidad cotidiana, para que te resulte más fácil aprender. Además, hallarás actividades para trabajar de manera individual y con tus compañeros; también recursos TIC para que uses la tecnología. La integración de conocimientos de cada unidad, te permitirá constatar las competencias que vas adquiriendo. Al final del libro encontrarás un Proyecto Interdisciplinario de Matemática con las otras asignaturas.

¡Disfrutarás mucho aprender Matemática! Para ello, “AZ en equipo” te guiará y acompañará siempre.

AZ Editora

Cómo es este libro

En este libro encontrarás **9 unidades didácticas**; en ellas podrás apreciar:

- Los **objetivos** propuestos.
- Una imagen alrededor de la cual se desarrollan **preguntas generadoras** y activadoras de los conocimientos previos que tienes.
- Los tres **bloques curriculares** que se trabajan son:
 - ▼ **Álgebra y funciones.** Lógica y conjuntos, Conjuntos numéricos, Operaciones y propiedades, Orden y propiedades. Matrices, Sistemas de ecuaciones lineales, \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 .
 - ▼ **Geometría y medida.** Lógica proposicional.
 - ▼ **Estadística y probabilidad.** Funciones, funciones reales, Funciones de distribución de probabilidad, Tratamiento y representación de datos.



Desarrollo de los temas de la unidad didáctica

- Cada tema presenta una **secuencia didáctica** que te permitirá aprender los contenidos de manera gradual.
- Antes de cada actividad encontrarás íconos que te permitirán anticipar la **propuesta de trabajo**:



Actividad de producción



Actividad de comprensión lectora



Actividad de pensamiento crítico



Actividad interdisciplinaria



Actividad de observación



Actividad de investigación



Actividad de intercambio grupal



● A lo largo del recorrido en cada tema hay diferentes íconos que te permitirán identificar qué **competencias** vas a potenciar y así poder luego aplicarlas en tu vida cotidiana.



Competencias matemáticas



Competencias comunicacionales



Competencias digitales



Competencias socioemocionales

Sección de cierre de la unidad didáctica

Integración de conocimientos

Esta **evaluación sumativa** te ayudará a comprender lo aprendido y mejorar tus competencias.



Al final de este libro encontrarás:

A corregir

Teniendo en cuenta los temas aprendidos serás capaz de **corregir** problemas y encontrar los **errores**.

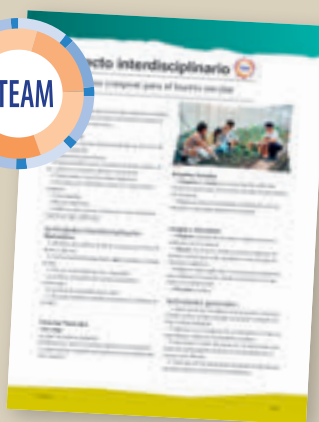
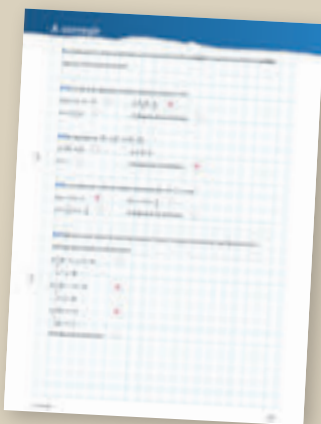
Proyecto

interdisciplinario

Es un **producto final** que **integra** las diferentes áreas del conocimiento donde **investigarás** con apoyo de la **tecnología**.

Fichas de repaso

Potenciarán tu trabajo **independiente** y descubrirás los aciertos y errores en el proceso de tu aprendizaje.



Podrás escanear los códigos QR, para descubrir y explorar **más información** sobre los temas de cada unidad.







UNIDAD 1






▼ ÁLGEBRA Y FUNCIONES

Para empezar	9	
La estrategia correcta	10	
Actividades	11	
Conjeturas y demostraciones	12	
Números naturales	13	
Algunas curiosidades	13	
Actividades	14	
El Teorema de Pitágoras	17	
Actividades	19	
Números enteros	20	
Actividades	21	
Proporcionalidad	23	
Proporcionalidad directa	23	
Actividades	24	
Proporcionalidad inversa	25	
Actividades	26	
Números racionales	27	
Operaciones y propiedades	27	
Actividades	28	
Porcentaje	29	
Actividades	30	
Sucesión de Fibonacci	31	
Actividades	33	
Sucesiones y leyendas	34	
Repaso	35	
Integración de conocimientos	37	

UNIDAD 2





▼ ÁLGEBRA Y FUNCIONES

Números reales	39	
Problemas de ingenio	40	
Actividades	41	
Expresión fraccionaria de un número decimal	41	
Actividades	43	
Números irracionales	45	
Números reales	47	
Actividades	49	
Ley de anulación del producto	50	
El número e	51	

Algunas aplicaciones del número e ...	52	
Actividades	53	
Los números reales y los puntos de la recta	55	
Módulo de un número real	57	
Intervalos de números reales	58	
Potencia de exponente fraccionario ...	59	
Actividades	60	
Notación científica	61	
Actividades	62	
Repaso	63	
Integración de conocimientos	65	

UNIDAD 3


▼ ÁLGEBRA Y FUNCIONES

Funciones	67	
Preparando jugo	68	
Actividades	70	
Rectas paralelas	71	
Pendiente de una recta	71	
Ordenada al origen	72	
Actividades	72	
Una manera cómoda de graficar ...	73	
Actividades	73	
Rectas perpendiculares	74	
Ceros de una función	75	
Actividades	76	
Función cuadrática	77	
Actividades	79	
Función de tercer grado	80	
Actividades	81	
Operaciones con funciones	82	
Actividades	82	
Funciones de proporcionalidad	83	
Función de proporcionalidad directa ..	83	
Actividades	84	
Función de proporcionalidad inversa ..	85	
Gráficos	86	
Actividades	87	
Función exponencial	89	
Fórmulas	89	
Actividades	90	
Repaso	91	
Integración de conocimientos	93	

UNIDAD 4

▼ **GEOMETRÍA Y MEDIDA**

Vectores 95

El tablero de juegos..... 96 

Actividades..... 97

Ubicación de puntos en el espacio... 98

Vectores equipolentes y
vectores opuestos..... 99

Actividades..... 100

Vectores equipolentes y
vectores opuestos..... 101

Otra manera de sumar..... 103

Actividades..... 104

Descomposición de un vector
en dos direcciones 105

Resta de vectores 106

Actividades..... 107

Multiplicación de un vector
por un número real..... 108

Coordenadas polares 109

Pasaje de coordenadas: uso de
calculadoras científicas 110



Repaso 111

Integración de conocimientos 113

UNIDAD 5


▼ **ÁLGEBRA Y FUNCIONES**

Sistemas de ecuaciones 115

Consultando precios..... 116  



Resolución de sistemas
de ecuaciones 117

Actividades..... 119

Otros caminos para la resolución
de sistemas..... 119 


Actividades..... 121

Otros caminos diferentes 123

Actividades..... 125  



La ecuación de la recta y
los sistemas de ecuaciones 125

Actividades..... 126

Sistemas incompatibles 127 



Sistemas indeterminados..... 128

Actividades..... 129



Sistemas con más de dos
ecuaciones 130  



Actividades..... 131

Sistemas de ecuaciones no lineales... 132

Actividades..... 133  

Los gráficos resuelven ecuaciones .. 134

Actividades..... 134  

Inecuaciones 135  

Actividades..... 136

Sistemas de inecuaciones 137

Más sistemas de inecuaciones... 139

Sistemas de inecuaciones
sin solución..... 140

Actividades..... 140

Repaso 141

Integración de conocimientos 143

UNIDAD 6

▼ **GEOMETRÍA Y MEDIDA**

Trigonometría 145

La casa alpina..... 146  


Actividades..... 147

Las ternas pitagóricas..... 149

Actividades..... 150

Triángulos semejantes 151

Actividades..... 152

Triángulos semejantes 153  

Actividades..... 155

Las razones trigonométricas
y la calculadora 155

Actividades..... 157

Resolución de triángulos
rectángulos..... 158

Otro ejemplo..... 158

Actividades..... 159



Ángulos de depresión y
de elevación..... 160  

Integración de conocimientos 161

UNIDAD 7

▼ ÁLGEBRA Y FUNCIONES

Funciones periódicas 163

Desarrollo periódico de los ecosistemas	164		
Ciclo, período y frecuencia	165		
Actividades	167		
Amplitud	169		
Actividades	170		
El sonido: ondas en el aire	171		
Actividades	172		
Suma de funciones periódicas	173		
Actividades	174		
Algo más sobre el sonido	175		
El eco	175		
El eco	176		
Repaso	177		
Integración de conocimientos	179		

UNIDAD 8

▼ GEOMETRÍA Y MEDIDA

Semejanza 181




Estaturas proporcionales	182		
Cuerpos semejantes	183		
Actividades	184		
Figuras semejantes	185		
Actividades	186		
Homotecia	187		
Un modo de dibujar figuras semejantes	187		
Actividades	188		
Más semejanza	189		
El método de los artistas	189		
Actividades	189		
Movimientos	191		
Simetría axial	192		
Otra función en el plano	192		
Actividades	193		
Triángulos semejantes	195		
Área y perímetro de figuras semejantes	197		
Peso y volumen de cuerpos semejantes	198		

Actividades	198
Integración de conocimientos	199

UNIDAD 9

▼ ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

Estadística y probabilidad 201

Ajustes salariales	202	
Población y muestra. Frecuencias ..	203	
Actividades	204	
Datos agrupados por intervalos ...	205	
Actividades	206	
Promedio, mediana y desvío típico ...	207	
Actividades	209	
Promedio en datos agrupados por intervalos	210	
Relación entre el promedio y el desvío típico	211	
Actividades	212	
Correlación	213	
Recta de regresión	213	
Correlación negativa	214	
Actividades	214	
Estadística y juegos de azar	215	
Actividades	216	
Números al azar	217	
Actividades	218	
Probabilidad de sucesos compuestos	219	
Actividades	220	
El número π y la probabilidad	221	
El azar no tiene memoria	222	
Actividades	222	
Repaso	223	
Integración de conocimientos	225	

A corregir 227

Proyecto interdisciplinario 229

Repaso (fichas) 231

Solucionario 239

Para empezar

En la vida cotidiana se observan situaciones que necesitan ser expresadas con números; por lo tanto, siempre estamos usando y operando con ellos. Por ejemplo, cuando vamos de compras necesitamos realizar cálculos para saber cuánto debemos pagar.

Esta unidad nos permitirá:

- ✓ Repasar las operaciones básicas entre números naturales.
- ✓ Reconocer situaciones cotidianas en las que se apliquen teoremas matemáticos.
- ✓ Identificar los elementos de los conjuntos “Z” y “Q”.
- ✓ Valorar la importancia del conocimiento matemático en la vida cotidiana.



A partir de la imagen, responde.

1. ¿Cómo se expresan los precios en las facturas del supermercado?
2. Si deseas saber el ahorro que has hecho en las compras, ¿qué operación realizas?
3. Menciona otra actividad cotidiana en la que uses los números.

Respuesta abierta



La estrategia correcta

Analícemos la siguiente situación.

Cada vez que tienen que ordenar su habitación, Pablo y Julián inventan alguna estrategia para evitarlo.

Esta vez a Pablo se le ocurrió sortear con su hermano la mala suerte.

Pablo sugiere arrojar dos dados: “Si la suma es impar ordeno yo, si la suma es par ordenas tú”, le dijo.

Reflexionemos...

- ¿Crees que es justa la propuesta de Pablo?

Sí, porque ambos tiene las mismas posibilidades de ganar

- **Propón** alguna situación parecida utilizando los dos dados de modo que ambos tengan las mismas posibilidades de ganar.

Respuesta abierta

Comprendemos que...

Métodos para contar

Contar no siempre resulta una tarea sencilla. Para considerar todas las posibilidades al arrojar los dos dados de Pablo y Julián, podemos enumerarlas una a una, por ejemplo, nombrando en primer lugar el número que sale en el dado rojo y en segundo lugar el que sale en el verde:

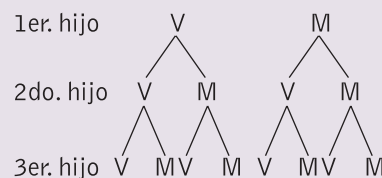
(1:1) (1:2) (1:3) (1:4) (1:5) (1:6) (2:1) (2:2) (2:3) (2:4) (2:5) (2:6) (3:1) (3:2) (3:3) (3:4) (3:5) (3:6) (4:1) (4:2) (4:3) (4:4) (4:5) (4:6) (5:1) (5:2) (5:3) (5:4) (5:5) (5:6) (6:1) (6:2) (6:3) (6:4) (6:5) (6:6),

Los pares subrayados son los que favorecen a Pablo, y corresponden a la mitad del total, es decir que la propuesta de Pablo ofrece a los dos las mismas posibilidades de ganar; en cambio la de Julián no es justa, ya que él tiene 6 casos que le favorecen, mientras que Pablo solo 5.

Para saber hacer

Conteo

Muchas veces enumerar todos los casos es demasiado extenso, por eso conviene utilizar algún otro método. Por ejemplo, si queremos contar de cuántas maneras diferentes puede estar constituida una familia con cinco hijos, de mayor a menor, primero conviene empezar por pensar en un problema similar pero más fácil. Por ejemplo, con 3 chicos. Una estrategia útil es utilizar un diagrama de árbol que ayuda a contar todas las posibilidades sin perderse.



Actividades

11 ¿Cuántos números capicúas de cinco cifras se pueden armar con los números 1, 7, 9, 0 y 4?

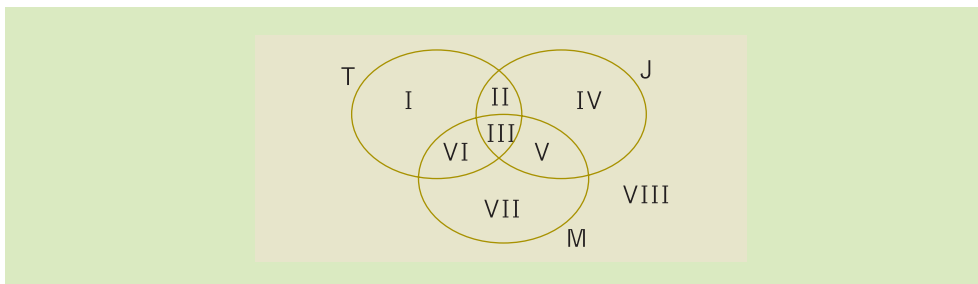


$4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1 = 100$ números distintos

12 ¿De cuántas maneras diferentes puede vestirse Camila si tiene 4 pantalones y 3 remeras?

De 12 maneras distintas.

13 En el siguiente diagrama, el conjunto T está formado por tintoreros, el conjunto J por japoneses y el M por personas mayores de 30 años.



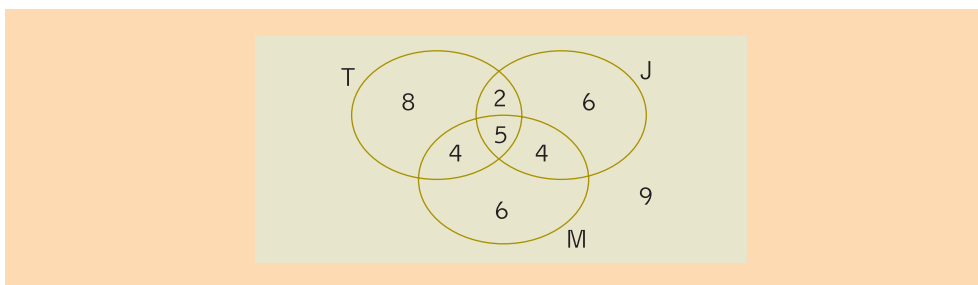
- a) ¿Qué número tiene el sector donde están ubicados los tintoreros argentinos de 40 años? VI.
 b) ¿Cómo describen a las personas que están en el sector III?

Tintoreros japoneses mayores de 30 años.

- c) ¿Cómo describen a las personas que están en el sector VIII?

No son tintoreros ni japoneses, ni mayores de 30 años.

14 Si en el mismo diagrama anterior se ubican estos números informando la cantidad de personas que hay en cada sector:



- a) ¿Con cuántas personas se hizo esta encuesta? Con 44 personas.
 b) ¿Cuántos japoneses hay? 17 japoneses.
 c) ¿Cuántos tintoreros mayores de 30 años hay? 9.
 d) ¿Qué otras preguntas podrías formular que puedan responderse con el gráfico? Respuesta abierta.



Conjeturas y demostraciones

Analiza la siguiente situación.

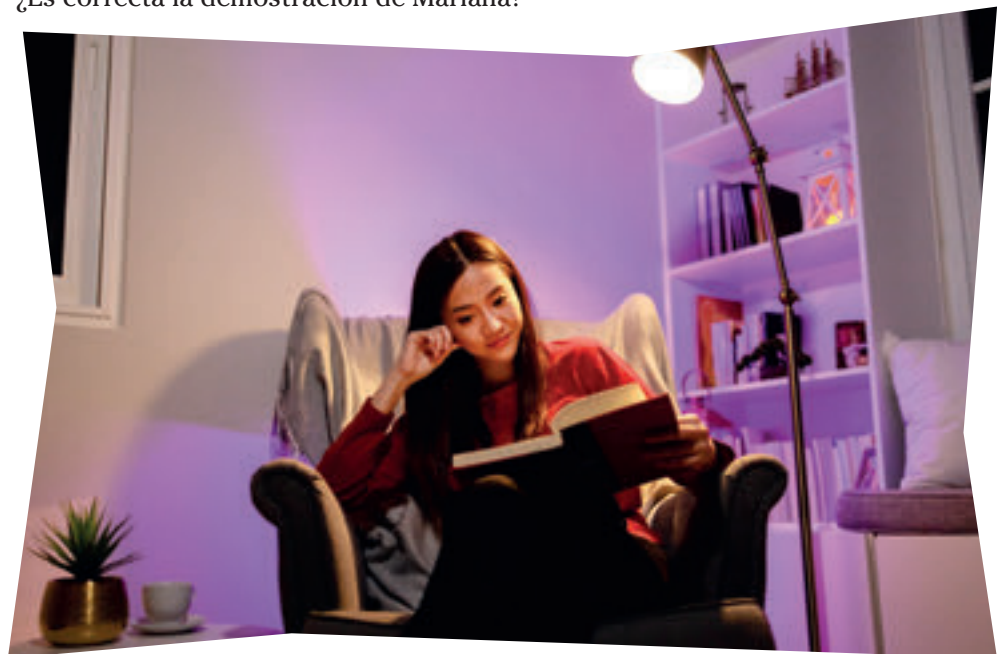
Mariana está leyendo un libro de su papá. El título del capítulo que está hojeando no le resulta conocido, dice “Conjetura de Goldbach”. ¿Qué será esto de conjetura? ¿Quién fue Goldbach?

Sigue leyendo y el texto continúa así: “Durante muchísimos años se ha intentado demostrar la conjetura que planteó Goldbach en 1742 y envió en una carta a Euler, uno de los más grandes matemáticos de todos los tiempos. La propuesta es sencilla: todo número par (excepto el 2 que es primo) puede expresarse como la suma de dos primos”.

Mariana se pregunta asombrada: “¿Tantos años y nadie pudo demostrarlo? Yo puedo hacerlo: $8 = 5 + 3$ ¡listo! 8 es par, 5 y 3 son primos, la conjetura queda demostrada”. ¿Es correcta la demostración de Mariana?



La demostración
<https://bit.ly/M10U1p12>



Lo que hizo Mariana fue **verificar** la propiedad, es decir, probar que se cumple para ese caso que ella eligió, pero esto no quiere decir que vaya a cumplirse siempre.

Para que la demostración esté terminada, debe probar con todos los casos posibles y si intenta hacerlo con uno por uno, no le alcanzará la vida para terminar su tarea, ya que los números naturales son infinitos.

Por este motivo, para probar que una propiedad es verdadera en un conjunto infinito se utilizan las letras a, b, c, \dots que no representan a ningún número en particular y que sirven para representar a todos los números. Cuando se habla del número entero a , ese número puede ser 2, 15, -14, 0, ... Cuando se quiere probar que una propiedad es falsa, basta con proponer un ejemplo que la contradiga. A este ejemplo los matemáticos lo llaman **contraejemplo**.

Si queremos demostrar que es falso que los múltiplos de 3 son impares, basta con un caso: el 12 es múltiplo de 3 y es número par. Este contraejemplo derrumba la conjetura y queda demostrado que es falsa. Los intentos muchas veces fallidos de demostrar una propiedad permiten descubrir otras propiedades muchas veces más interesantes que la que se pretendía probar.

Recuerda que...

Números primos

Un número natural es primo cuando es divisible solo por sí mismo y por 1.



Números naturales

Algunas curiosidades

Analiza la siguiente situación.

Tomás está ayudando a Mercedes, su hermana menor, a hacer la tarea. Ella tiene que ubicar unas fichas formando rectángulos de más de una fila de altura. Por ejemplo, 8 fichas las puede ubicar así:

 pero no así: 

A los números que pueden disponerse de esta manera se los llaman **números rectangulares**.

¿Los números 6 y 9 son rectangulares?

¿El número 7 es rectangular?

Mencionen 3 números que no sean rectangulares.



Cuando Mercedes quiso ubicar 9 fichas formando un rectángulo, las colocó así:



Este número es rectangular, ya que con las fichas armó un cuadrado y todo cuadrado es rectángulo.

El 9, **además** de ser un número rectangular, es un número cuadrado.

Un cuadrado es un rectángulo cuyos cuatro lados son iguales.

Con 7 fichas no hubo manera de formar un rectángulo.

Tomás le explicó a su hermana que los números naturales con los que no pueden armarse rectángulos son **números primos**.

También pueden formarse números rectangulares especiales, como sucedió con el 9, que es un **número cuadrado**.

¿Qué otros números cuadrados, además del 9, pueden proponer?

También se pueden encontrar números triangulares, que son los que pueden ordenarse formando triángulos, como por ejemplo el 6.



Mientras investigaba con la tarea de su hermanita, Tomás descubrió algunas otras cosas interesantes.

Por ejemplo, que si en la fórmula $2 \cdot n$ reemplaza a n por cualquier número natural obtiene un número par, mientras que si lo hace en $2n + 1$ siempre obtiene un número impar.

Siguió investigando y vio que si suma dos números pares obtiene un número par, claro que a esta altura Tomás sabe que para demostrar una propiedad no basta con proponer ejemplos. Consideró el número par a y el número par b . Si estos números son pares deben poder escribirse del siguiente modo:

$$a = 2 \cdot n$$

$$b = 2 \cdot m$$

La suma $a + b = 2n + 2m = 2 \cdot (n + m)$

“ $m + n$ ” es un número al que, por ejemplo, podemos llamar p

$$a + b = 2 \cdot p$$

$2p$ es un número par, por lo tanto, **la suma de dos pares es otro par.**

Entusiasmado con sus resultados quiso indagar qué ocurre con la suma de dos impares. Empezó por investigar con algunos ejemplos:

$$3 + 5 = 8$$

$$11 + 5 = 16$$

$$15 + 5 = 20$$

Su conjetura es que **la suma de dos números impares da por resultado un número par.**

Para probarla “construyó” dos números impares:

$$a = 2 \cdot k + 1$$

$$b = 2 \cdot p + 1$$

Luego sumó $a + b = (2k + 1) + (2p + 1) = 2k + 1 + 2p + 1 = 2k +$

$$2p + 2 = 2 \cdot \underbrace{(k + p + 1)}_t = 2 \cdot t$$

$2 \cdot t$ es la forma de un número par, por lo tanto ahora sí demostró que **la suma de dos números impares es par.**

Recuerda que...

Propiedad distributiva

La propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma asegura que:

$$a \cdot (m + n) = a \cdot m +$$

$$a \cdot n$$

El signo igual puede leerse en ambas direcciones, por lo tanto la propiedad distributiva permite escribir:

$$a \cdot m + a \cdot n = a \cdot (m + n)$$

Actividades



5 **Completa** indicando en cada caso si las expresiones siguientes corresponden a números pares, impares o si no puede asegurarse ninguna de las dos cosas (en todos los casos, las letras representan números naturales).

a) $2(t + 1)$

b) $2t + 1$

c) $5 \cdot h$

d) $4 \cdot f$

e) $6 \cdot m + 3$

f) $2(p + q + f) + 2$

g) $3(p + q + f) + 2$

h) $5 \cdot h \cdot 2$



► 6 Investigar qué se obtiene sumando un número par más uno impar. No se puede asegurar.



Demuestra la conjetura. $2 \cdot n + (2 \cdot k + 1) = 2 \cdot (n + k) + 1 = 2 \cdot t + 1$

► 7 Gustavo hizo esta demostración de que la suma de dos números impares es un número par:

$$a = 2p + 1 \quad b = 2p + 1 \text{ entonces } a + b = 2p + 1 + 2p + 1 = 4p + 2 = 2 \cdot (2p + 1) = 2t$$

¿Es correcta la demostración de Gustavo? ¿Por qué?

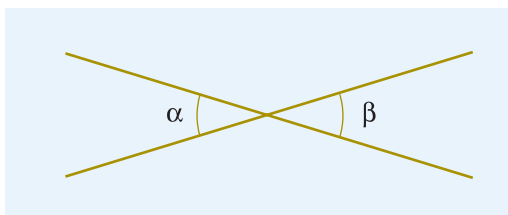
No, porque de esa manera emplea 2 veces el mismo número impar. Está bien así: $a = 2 \cdot p + 1$; $b = 2 \cdot k + 1$

► 8 Teniendo en cuenta el gráfico demuestra que $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$

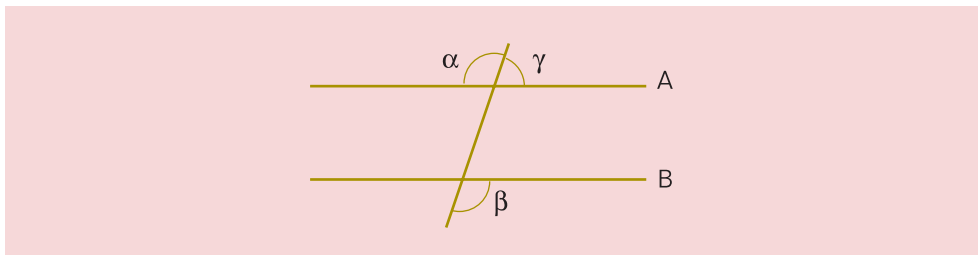
$\alpha + \varepsilon = 180^\circ$ y $\beta + \varepsilon = 180^\circ$

$\alpha = 180^\circ - \varepsilon$ y $\beta = 180^\circ - \varepsilon$

Entonces, $\alpha = \beta$



► 9 Las rectas A y B son paralelas.



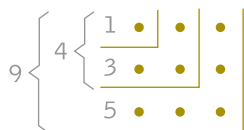
Marita sabe que los $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son iguales y quiere demostrar que $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 180^\circ$.

Empezó su demostración así: $\hat{\alpha} + \hat{\gamma} = 180^\circ$. ¿Cómo puede continuarla?

En lo que escribió Marita, se puede reemplazar β por α , ya que $\alpha = \beta$. Nos queda: $\gamma + \beta = 180^\circ$.

► 10 Paula lo demostró midiendo los ángulos con el graduador. ¿Es correcta la demostración que hizo? No.

► 11 Fernanda descubrió otra propiedad interesante: "La suma de cualquier serie de números impares consecutivos es siempre un número cuadrado".



Agregando el número impar siguiente, siempre se forma un cuadrado.

$$\begin{aligned} 1 &= 1^2 \\ 1 + 3 &= 4 = 2^2 \\ 1 + 3 + 5 &= 9 = 3^2 \\ 1 + 3 + 5 + 7 &= 16 = 4^2 \end{aligned}$$

Para demostrarlo se le ocurrió hacer el gráfico.

¿Es correcta la demostración de Fernanda? Sí.



► 12 Une con flechas cada expresión con la traducción simbólica que le corresponda:

- | | | |
|-----------------------------------------------|---|----------------------|
| a) El cuadrado de un número impar | → | 1) $2 \cdot (a + 1)$ |
| b) El siguiente de a | → | 2) $a - 1$ |
| c) El doble del siguiente de a | → | 3) $(a - b)^3$ |
| d) El siguiente del doble de a | → | 4) $2 \cdot a + 1$ |
| e) El anterior a a | → | 5) $a^3 - b^3$ |
| f) Un número más su siguiente | → | 6) $(2x + 1)^2$ |
| g) El cubo de la diferencia entre a y b | → | 7) $a + (a + 1)$ |
| h) La diferencia entre los cubos de a y b | → | 8) $a + 1$ |

► 13 Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y **demuestra** oralmente tus conclusiones.

- a) La suma de un número con su siguiente es un número impar. V
- b) El cuadrado de un número impar es par. F
- c) El cuadrado de un número par es par. V
- d) Si dos ángulos son iguales entonces son opuestos por el vértice. F

► 14 Franco hizo la siguiente demostración.

$$(2p + 1) \cdot (2k + 1) = 4pk + 2p + 2k + 1 = 2 \cdot \underbrace{(2pk + p + k)}_h + 1 = 2h + 1$$

¿Qué demostró Franco? El producto de dos números impares es un número impar.

► 15 Facundo dice que esta expresión: $x + (x - 1)$ puede traducirse como un número más su siguiente. ¿Es correcta la traducción de Facundo? (Ayuda: **recuerda** que la suma es conmutativa.) Sí, el siguiente de $(x - 1)$ es x .

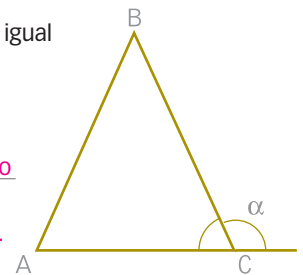


► 16 Paula recuerda esta propiedad que estudió en octavo: "En todo triángulo un ángulo exterior es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes con él".

Para demostrarlo comenzó del siguiente modo: $\hat{C} + \hat{\alpha} = 180^\circ$ por ser adyacentes.

¿Cómo puede continuar? Entonces, $\hat{C} = 180^\circ - \hat{\alpha}$ [1] La suma de los ángulos interiores de un triángulo

mide 180° . Es decir: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$. Entonces, resulta: $\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B})$ [2] De [1] y [2] resulta que $A + B = \hat{\alpha}$.



La suma de tres números consecutivos es 21, ¿cuáles son esos números? Rocío lo traduce así $x + (x + 1) + (x + 2) = 21$. Constanza así $(x - 1) + x + (x + 1) = 21$ y Magali así $(x - 2) + (x - 1) + x = 21$. La profesora les dice a las tres que el planteo es correcto, pero al resolverlo cada una encuentra un valor distinto de x . ¿Cómo puede explicarse esto?



El Teorema de Pitágoras

Analiza la siguiente situación.

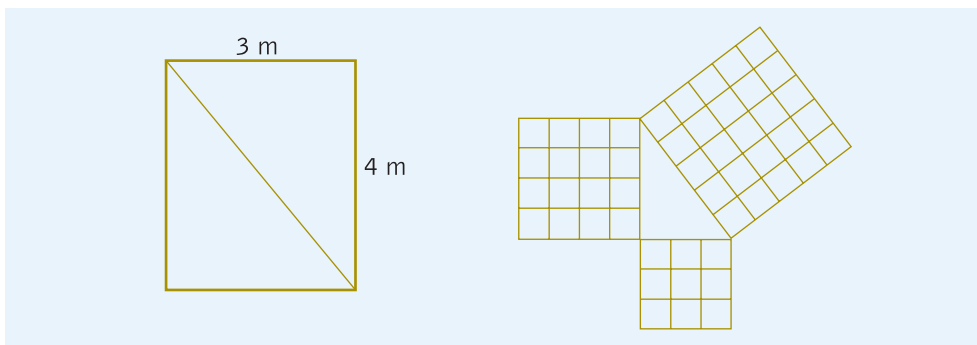
Fabián le compró a su ahijado Julián un avión gigante de 80 cm de largo. Para regalárselo quiere guardarlo en una caja de modo que aunque el avión no quede apoyado en la base de la caja, esta se pueda tapar y lleve un hermoso moño.



¿Puede utilizar una caja de 40 cm de largo, 50 cm de ancho y 60 cm de alto? Él prefiere otra de 80 cm de largo x 30 cm de ancho y 20 cm de alto. ¿Cuál de las dos le conviene usar, si en ninguno de los dos casos tiene problema con el ancho del juguete?

Si consideramos un rectángulo cualquiera, los segmentos de mayor longitud que pueden trazarse dentro del cuadrilátero son sus diagonales.

Por ejemplo, sobre un piso de 3 m x 4 m.



La varilla más larga que puede apoyarse es la que tiene la longitud de su diagonal. Para obtener dicha longitud existe una propiedad llamada **Teorema de Pitágoras** que permite encontrar la longitud de cualquiera de los lados de un triángulo rectángulo conociendo los otros dos.

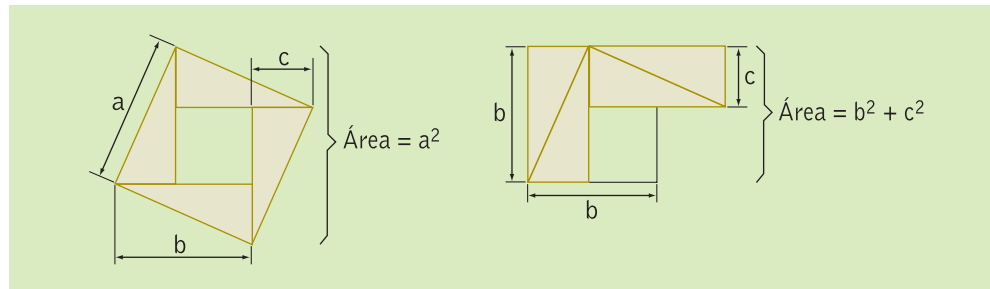
El Teorema de Pitágoras asegura que el área del cuadrado que puede construirse sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados que pueden construirse sobre los catetos.

Recuerda que...

Los triángulos rectángulos

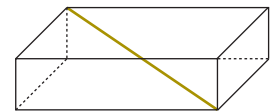
Los triángulos que tienen un ángulo recto se llaman **triángulos rectángulos**. Los lados que forman el ángulo recto se llaman **catetos** y el restante **hipotenusa**.

Para demostrar esta propiedad existen diferentes recursos. Un procedimiento gráfico es el siguiente:



En el dibujo se ve que con cortes efectuados convenientemente, los cuadrados construidos sobre cada cateto permiten construir el cuadrado sobre la hipotenusa.

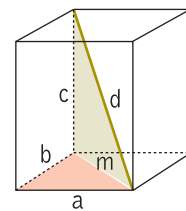
Para saber si el avión que compró Fabián puede guardarse en alguna de las cajas, debemos calcular la longitud de la diagonal.



Para esto podemos usar el Teorema de Pitágoras en el plano.

En el triángulo dibujado sobre la base de la caja, la hipotenusa m puede calcularse así:

$$m^2 = a^2 + b^2$$

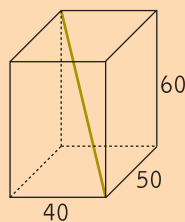


Por otro lado, la diagonal del piso es el cateto del triángulo verde cuya hipotenusa es la diagonal de la caja:

$$d^2 = m^2 + c^2 \text{ pero como } m^2 = a^2 + b^2$$

Puede anotarse $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$

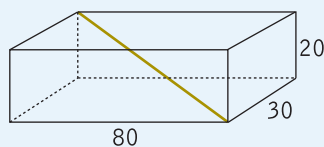
La diagonal de cada una de las dos cajas de Fabián pueden calcularse de este modo:



$$d^2 = 40^2 + 50^2 + 60^2$$

$$d^2 = 7700$$

$$d \approx 87,75 \text{ cm}$$



$$d^2 = 80^2 + 20^2 + 30^2$$

$$d^2 = 7700$$

$$d \approx 87,75 \text{ cm}$$

Comprendemos que...

Teorema de Pitágoras:

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Actividades

► 17 En alguna de las cajas que midió Fabián en el problema de la página anterior, ¿el avión queda apoyado sobre la base?

Sí, en la que tiene por medidas 80 cm, 30 cm y 20 cm.

► 18 **Propón** las dimensiones de otra caja cuya diagonal sea de la misma longitud que la de las cajas de Fabián, pero de modo que sus aristas sean de otra longitud.

Un ejemplo: $352 + 452 + x^2 = d^2$
 $352 + 452 + x^2 = 7700$
 $1225 + 2025 + x^2 = 7700$
 $x = 4450$
 $x = 66,70$

► 19 **Calcula** la medida de la diagonal del salón de clase. _____

► 20 La diagonal d es de 9 cm, la arista AB es de 5 cm y la BC es de 4 cm.

a) ¿Cuál es la longitud aproximada de la arista CD ?

$CD \approx 6,32$ cm

b) ¿Cuál es el volumen de la caja?

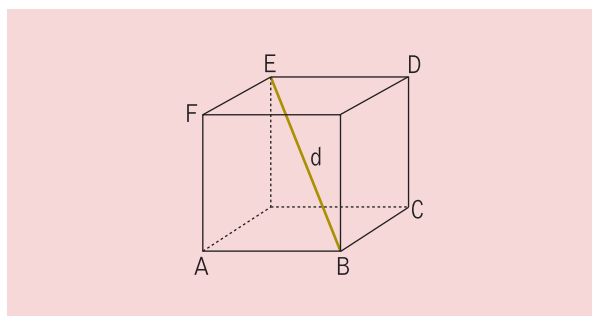
$126,4$ cm³

c) ¿Cuál es la medida de su superficie?

$153,76$ cm²

d) Si se va a pegar una cinta bordeando sus aristas, ¿cuántos metros de cinta son necesarios?

$61,28$ cm



► 21 **Dibuja** en el plano el triángulo ABC siendo $A = (2,3)$, $B = (2,5)$ y $C = (7,3)$. **Obtén** el perímetro y la medida de su superficie.



Perímetro: 12,39 Medida de la superficie: 5

► 22 ¿Puede construirse un triángulo rectángulo cuya hipotenusa tenga una longitud de 5 cm y uno de sus catetos sea de 8 cm? **Justifica** tu respuesta.

No. En un triángulo rectángulo, la hipotenusa siempre tiene mayor longitud que cada cateto.

► 23 ¿Qué altura debe tener como mínimo una caja cuya base es un rectángulo de 7 cm x 10 cm para poder guardar en ella una varilla de 20 cm de largo?

Como mínimo 15,9 cm (si truncamos el número y elegimos 15,8 cm de alto, la varilla no cabe).

► 24 Si la base de la caja es un rectángulo de 7 cm de largo, ¿cuál debe ser su ancho mínimo para poder apoyar sobre ella la varilla del problema anterior?

Como mínimo 18,8 cm.

► 25 **Calcula** la distancia entre los puntos A y B del plano, siendo $A = (-1;7)$ y $B = (2;9)$.

Distancia = 13 (AQUÍ VA RAÍZ DE 13)

Números enteros

Recuerda que...

Símbolo

El conjunto de números enteros se simboliza con la letra **Z**.

Dentro del conjunto **Z** podemos distinguir los **enteros positivos**, los **enteros negativos** y el **cero**.

El golf es un deporte con reglas bastante fáciles de aprender. El campo consta de una serie de hoyos, que se recorren en un determinado sentido. Cada campo tiene un número de hoyos determinado, que no es siempre el mismo. A su vez, cada hoyo tiene establecido de antemano la cantidad de golpes que se dará a la pelota para introducirla en él, y a este número se lo llama *par hoyo*. Por ejemplo, cuando uno dice que el par del hoyo 4 es 3, significa que para el hoyo 4 están previstos 3 golpes. Si un jugador logra acertar en el hoyo 4 en 2 golpes, anotará -1. Si lo hace en 6 golpes anota +3. Y si lo hace en 3 golpes anota “par”, es decir 0. A su vez, la cancha tiene una cantidad de golpes para recorrerla completamente. Gana el jugador que tenga menor puntaje al finalizar el campo. La planilla siguiente muestra los resultados que obtuvo Sebastián en un campo con 6 hoyos.

Hoyos	Golpes dados	Par hoyo	Resultado
1	a	3	+1
2	5	b	+2
3	4	5	c
4	d	3	-1
5	4	e	par
6	5	3	f

Reemplaza las letras de la tabla por los números correspondientes:

- ¿Cuántos golpes dio en total para recorrer el campo?
- ¿Cuál era el número establecido para recorrerlo?
- ¿Con qué puntaje Sebastián terminó el partido?

Para determinar el puntaje en cada secuencia del partido de golf utilizamos números enteros.

Para poder responder las preguntas del problema debemos resolver algunas operaciones con números enteros; por ejemplo, el hoyo 1 debe acertarse en 3 golpes. Si el jugador tiene resultado +1 quiere decir que logró acertar recién en el cuarto golpe.

Del mismo modo, operando con los otros valores, podemos responder las preguntas restantes.



Actividades

►26 Responde todas las preguntas pendientes del problema del golf de la página anterior.



$a = 4$ $b = 3$ $c = -1$ $d = 2$ $e = 4$ $f = 2$ Golpes 24; nº para recorrerlo 21; puntaje: 3

►27 Se llama amplitud térmica a la diferencia entre la temperatura máxima y la mínima.

Calcula la amplitud térmica en cada uno de los siguientes casos.

Máxima	12	5	30	-1	20
Mínima	-4	-1	14	-15	7

$a = 16$ $b = 6$ $c = 16$ $d = 14$ $e = 13$

►28 Resuelve las siguientes ecuaciones con números enteros:

a) $2 \cdot (x - 1) - 3 \cdot (x + 2) = -8$ $x = 0$

b) $(x + 3)^2 - x^2 + 3x = 8x - 1$ $x = -10$

c) $-(-2 + 3x) = x + 18$ $x = -4$

Para saber hacer

Propiedades de las operaciones en \mathbb{Z}

La suma y la multiplicación de enteros son conmutativas: $a + b = b + a$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

También son asociativas: $a + (b + c) = (a + b) + c$

$$a (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

Estas propiedades las utilizamos habitualmente para hacer los cálculos más sencillos.

Por ejemplo: $97 + 15 + 3 = 97 + 3 + 15 = (97 + 3) + 15 = 115$

conmutativa asociativa

$$25 \cdot 13 \cdot 4 = 25 \cdot 4 \cdot 13 = (25 \cdot 4) \cdot 13 = 100 \cdot 13 = 1300$$

conmutativa asociativa

La resta y la división no cumplen ninguna de estas propiedades.

La suma y la multiplicación tienen elemento neutro. Para la suma es el 0:

$$a + 0 = 0 + a = a$$

Para la multiplicación es el 1:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

Para la suma de enteros todo número a tiene su opuesto $-a$ de modo que $a + (-a) = 0$.

La multiplicación es distributiva respecto de la suma y de la resta: $a(b + c - d) = a \cdot b + a \cdot c - a \cdot d$.

La división es distributiva respecto de la suma y de la resta, pero solo a derecha y siempre y cuando dichas divisiones resulten exactas.

Por ejemplo $(8 + 4) : 2 = 8 : 2 + 4 : 2$, pero $(8 + 4) : 5 \neq 8 : 5 + 4 : 5$ ya que en \mathbb{Z} estas divisiones no pueden resolverse. Tampoco es válido distribuir a izquierda $12 : (2 + 4) \neq 12 : 2 + 12 : 4$.

$$2 \neq 8$$

La potenciación es distributiva respecto de la multiplicación y división y no lo es con respecto a la suma y a la resta.

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad (a : b)^n = a^n : b^n \quad (a + b)^n \neq a^n + b^n \quad (a - b)^n \neq a^n - b^n$$



►29 Pablo tiene 4 años más que Julián, ¿cuáles de las siguientes expresiones representan esta situación? (P es la edad de Pablo y J la de Julián.)

- a) $P + 4 = J$ b) $P - J = 4$ c) $P - 4 = J$
 d) $P \cdot 4 = J$ e) $J - P = -4$ f) $P = J + 4$

Las expresiones b, c, e y f.

►30 Siendo $a = -2$; $b = 3 - a$, $c = -b$ y $d = a + b$

- a) Encuentra $2 \cdot a - b + c$. -14 b) Ordena a, b, c y d de menor a mayor. $c < a < d < b$.

►31 Resuelve de dos modos diferentes

- a) $-2 \cdot (3 + 5) =$ b) $8 : (-2) + 6 : (-2) =$ c) $\sqrt{4} \cdot \sqrt{9} =$
 d) $(-1 + 2)^2 =$ e) $(3 \cdot 4)^2 =$

►32 Resuelve los siguientes cálculos

- a) $(-2 + 3) - \sqrt{16 + 9} : (-5) - (-3)^2 - 5 =$
 b) $- \{15 + [4 - 3 \cdot 2 + 12 : (-6) - (3 + 4) \cdot (-5)] - 1\} + 4 =$
 c) $-3 + 4 \cdot 5 - (2 + 3 - 1) \cdot (-7) + 6 - 2 + 3 =$



►33 Responde V o F, justifica oralmente la respuesta.

- a) $8 - 3 + 2 = 8 - 5$ b) $-2 \cdot -2 = 4$
 c) $(3 + 5)^2 = 9 + 25$ d) $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot ab$
 e) $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$ f) $-a$ es un número negativo.
 g) $-a$ es el opuesto de a. h) $a + (-a) = 0$.
 i) $(-a) \cdot (-a)$ es un número positivo. j) El cero es neutro para la resta.
 k) Todo número positivo es mayor que cualquier negativo.

►34 Arquímedes nació en el año -287 y murió en -212.

- a) ¿Cuántos años vivió? Vivió 75 años. b) ¿Cuándo cumplió 30 años? En -257.

►35 Una videocasetera indica, después de rebobinar 30 minutos, -0:15 (el primer número indica las horas y el segundo los minutos).

- a) ¿Qué número aparecerá en el visor si se rebobinan 25 minutos más? -0 : 40
 b) ¿Qué aparecerá si se avanza 1 h 18 minutos respecto de la posición -0:15? 1 : 03



Proporcionalidad

Proporcionalidad directa

Analiza la siguiente situación.

El abuelo Carlos viaja periódicamente a Ambato, para disfrutar de un fin de semana de descanso. Si maneja con una velocidad promedio de 120 km/h, tarda 3 horas en llegar. ¿A qué distancia está Ambato de su casa? ¿Cuánto tardará en llegar hasta Riobamba, que se encuentra 60 km más lejos?



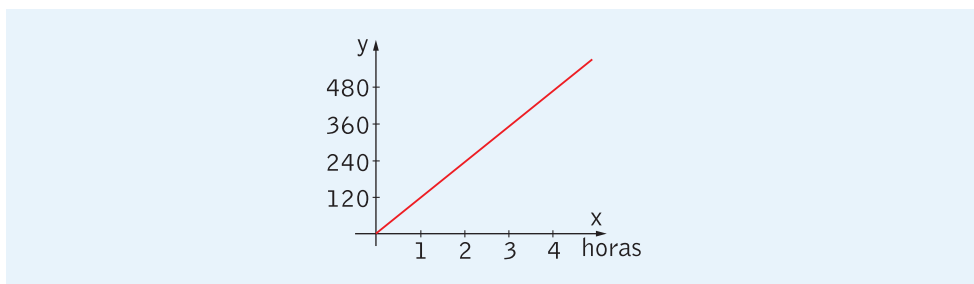
Cuando comparamos dos magnitudes y el cociente entre ellas es constante decimos que dichas magnitudes son directamente proporcionales.

Para saber a qué distancia está Ambato de su casa, el abuelo pensó de la siguiente manera: como su velocidad es 120 km/h, en 1 hora recorre 120 km. La información se puede mostrar del siguiente modo:

Tiempo	1 hora	2 horas	3 horas	4 horas	5 horas
Distancia	120 km	240 km	360 km	480 km	600 km

Aquí vemos que su casa se encuentra a 360 km de Ambato.

Podemos volcar los datos obtenidos en un gráfico cartesiano como el siguiente:



Vemos que el dibujo resulta ser una recta que pasa por el origen.

Como vemos, el cociente entre la distancia y el tiempo es siempre 120. A dicho número lo llamamos razón de proporcionalidad.

$$\frac{120}{1} = \frac{240}{2} = \frac{360}{3} = \frac{480}{4} = \frac{600}{5} = 120$$

Otra manera de asegurarnos que la proporcionalidad es directa, es verificar que si una magnitud (el tiempo, por ejemplo) se duplica, triplica, o se divide a la mitad, a la otra magnitud correspondiente (la distancia en nuestro ejemplo) le sucede lo mismo, o sea, se duplica, triplica o se divide a la mitad.

$$\frac{120}{1} = \frac{240}{2} = \frac{360}{3} = \frac{480}{4} = \frac{600}{5} = 120$$

$\xrightarrow{x2}$ $\xrightarrow{x3}$ $\xrightarrow{x4}$ $\xrightarrow{x5}$
 $\xleftarrow{x2}$ $\xleftarrow{x3}$ $\xleftarrow{x4}$ $\xleftarrow{x5}$

Esto nos permite responder cuánto tardará el abuelo Carlos en llegar a Riobamba, que se encuentra 60 km más adelante. Sabemos que cada hora avanza 120 km. Como queremos recorrer 60 km (que es la mitad de 120 km) tardaremos $\frac{1}{2}$ hora más. Para llegar a Riobamba tardará 3 horas y media.

Actividades

▶ **36** Se sabe que 10 máquinas producen 60 000 juguetes en 30 días.

¿Cuál es la producción diaria de las 10 máquinas? ¿Y de cada una? a) 2000. b) 200.

▶ **37** Julián heredó de su tía francesa una parcela de tierra cotizada en 7500 francos.

Averigua cuántos dólares cuesta 1 franco, y luego **calcula** la herencia de Julián.

Respuesta abierta.

▶ **38** En las siguientes situaciones no hay proporcionalidad directa. **Explica** por qué.

a) Un niño al año de edad pesa 13,5 kg. ¿Cuánto pesará a los 10 años? Respuesta abierta.

b) El lado de un cuadrado se triplica. ¿Cuánto aumenta su superficie? Respuesta abierta.



▶ **39** Analía viajó de luna de miel a Tegucigalpa. Al llegar compró tres cajas de bombones para comer durante los paseos. Si por ellas abonó \$ 9,75, ¿le alcanzan \$ 42 para comprar 12 cajas más para repartir entre sus sobrinos a su regreso?

Sí, pues 12 cajas cuestan \$39.

▶ **40** **Indica** cuáles de las siguientes tablas son de proporcionalidad directa. En dichos casos, **calcula** la razón de proporcionalidad.

a)

x	y
1	5
2	10
3	12

b)

x	y
1	2
2	3
3	4

c)

x	y
1	1
2	2
3	3
4	4

d)

x	y
1	150
3	450
0	0

e)

x	y
1	4
2	8
5	40

La tabla c (razón = 1) y la tabla d (razón = 150)



Proporcionalidad inversa

Analiza la siguiente situación.

Los fabricantes de alfajores “Raulito” envasan su producción en 960 cajas de 12 alfajores cada uno. Quieren enviar al mercado solo cajas de 4 alfajores. ¿Cuántas cajas necesitarán para envasar toda su producción? ¿Y si deciden hacerlo en cajas de 6 alfajores?

Decimos que dos magnitudes x e y son inversamente proporcionales cuando:

- 1) El producto de las mismas es siempre constante. En símbolos $x \cdot y = k$, donde k representa una constante numérica.
- 2) Al multiplicar o dividir una de ellas por un número, la otra queda dividida o multiplicada, respectivamente, por el mismo número.

Decimos que al aumentar una de ellas, la otra disminuye en la misma proporción y viceversa.

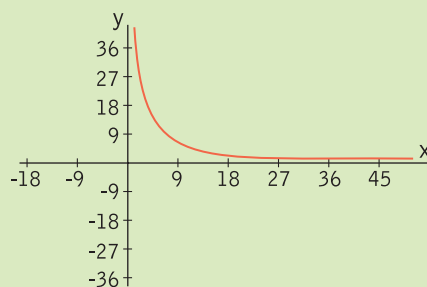
Observemos la siguiente tabla de dos magnitudes inversamente proporcionales:

En la tercera columna mostramos todos los productos “ $x \cdot y$ ”, los cuales son iguales a 36. Esta es la constante k y se llama **constante de proporcionalidad**.

Además, podemos observar que al multiplicar o dividir en la primera columna por un número, el elemento correspondiente a la segunda columna queda dividido o multiplicado respectivamente por el mismo número.

x	y	x . y
1	36	36
2	18	36
3	12	36
4	9	36
6	6	36
9	4	36
12	3	36
18	2	36
36	1	36

Al representar los pares ordenados en un gráfico cartesiano obtenemos una curva llamada **hipérbola**.



Los fabricantes de alfajores necesitan averiguar cuál es la producción total hasta el momento: si venden 960 cajas con 12 alfajores cada una, en total hay 11 520 alfajores.

Si quieren envasar en cajas de 4, necesitarán $11\ 520 \div 4 = 2880$ cajas.

Si quieren envasar en cajas de 6, necesitarán $11\ 520 \div 6 = 1920$ cajas.

Actividades



41 Un auto tarda 4 horas en recorrer 320 km. Si duplica su velocidad, ¿cuánto tardará en hacer el mismo recorrido? ¿Cuántos km recorrerá en 8 horas, suponiendo que mantiene esa nueva velocidad?

a) 2 horas. b) 1280 km

42 Norma y Alicia necesitan completar un trabajo en 20 días. Hacen cálculos y estiman que trabajando 8 horas diarias cada una lo terminarán a tiempo. ¿Cuántos días más necesitarán, si solo pueden trabajar 6 horas diarias? ¿Cuántas horas deberán trabajar por día si la entrega debe hacerse dentro de 10 días?

a) 7 días más. b) 16 horas diarias cada una de ellas.

Para saber hacer

Proporcionalidad con más variables

Si consideramos una situación donde intervienen varias variables, como por ejemplo esta:

“Un automovilista recorrió una distancia determinada en 10 días a razón de 6 horas diarias yendo a una velocidad promedio de 80 km/h. ¿A qué velocidad debe conducir para recorrer la misma distancia en 8 días a razón de 8 horas diarias?”

En estos casos resulta cómodo trabajar con una variable por vez.

Por ejemplo, trabajemos primero con los días de viaje y la incógnita que es la velocidad

días	velocidad
10 d	80 km/h
8 d	x

Como aquí hay proporcionalidad inversa planteamos $10d \cdot 80 \text{ km} = 80d \cdot x$

$$\frac{10 \cdot 80 \text{ km}}{8 \cdot d} = 100 \text{ km}$$

Es decir que manejando 8 días a 6 horas diarias (que no se modificaron) debe conducir a 100 km/h. Ahora modificamos la otra variable.

hora diaria	velocidad
6 h	100 km/h
8 h	x

Aquí también hay proporcionalidad inversa $\Rightarrow 6 \cdot 100 = 8 \cdot x$

$$\frac{6 \cdot 100}{8} = x \Rightarrow x = 75 \text{ km/h}$$

Debe conducir a una velocidad promedio de 75 km/h.

Números racionales

Operaciones y propiedades

Analiza la siguiente situación.

Los padres de Norma tienen su presupuesto perfectamente elaborado.

Gastan $\frac{2}{5}$ de su ingreso en alimentos, $\frac{1}{6}$ en impuestos y $\frac{1}{18}$ en golosinas y regalos para sus nietos. El resto del dinero lo ahorran.

El año pasado (con los 12 sueldos) ahorraron 6800 dólares.

¿Qué parte del ingreso mensual ahorran?

¿Cuál es su ingreso por mes?



En este problema aparecen números racionales: $\frac{2}{5}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{18}$. Para poder resolverlo necesitamos hacer algunas operaciones. Por ejemplo, para saber qué parte del sueldo ahorran podemos comenzar por averiguar qué parte gastan; para esto, sumamos:

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$$

Para sumar fracciones con distinto denominador comenzamos por buscar fracciones equivalentes con igual denominador entre sí.

$$\frac{2}{5} = \frac{36}{90}, \frac{1}{6} = \frac{15}{90}, \frac{1}{18} = \frac{5}{90}$$

Entonces

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} = \frac{36}{90} + \frac{15}{90} + \frac{5}{90} = \frac{56}{90} = \frac{28}{45}$$

Por lo tanto, ahorran

$$1 - \frac{28}{45} = \frac{45}{45} - \frac{28}{45} = \frac{17}{45}$$

Con 12 sueldos ahorraron \$ 6800, por lo tanto $\frac{17}{45} \cdot 12$ es la parte del ahorro anual.

$$\frac{17}{45} \cdot 12 = \frac{68}{15} \quad \text{entonces} \quad \frac{68}{15} \text{ ————— } \$ 6800$$

$$\frac{15}{15} \text{ ————— } x \Rightarrow x = 1 \cdot 6800 : \frac{68}{15}$$

$$x = 6800 \cdot \frac{15}{68} = \$ 1500$$

Los padres de Norma ganan \$ 1500 por mes. Gastan $\frac{2}{5}$ del sueldo en alimentos, o sea \$ 600.

$$\frac{1}{6} \text{ en impuestos: } \frac{1}{6} \cdot 1500 = \$ 250$$

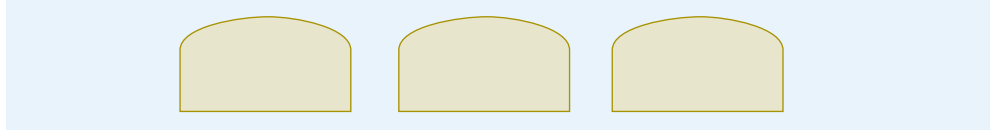
$$\frac{1}{18} \text{ en golosinas y regalos: } \frac{1}{18} \cdot 1500 \approx \$ 83,33.$$

Actividades



▶43 ¿Qué parte representa 1 segundo en 3 horas? 1/10800

▶44 Si la unidad está representada del siguiente modo, **dibujen** $\frac{1}{2}$, la sexta parte y los $\frac{7}{2}$ de la unidad.



Respuesta abierta.

▶45 Marta, Claudia y Susana están realizando un trabajo en la computadora. Marta escribe a razón de 20 páginas por semana, Susana a razón de 18 páginas por semana y Claudia a razón de 15 páginas por semana. Si el trabajo consta de unas 600 páginas, ¿cuándo terminarán de hacerlo? ¿Qué parte del trabajo habrá hecho cada una?

a) Aproximadamente 11 semanas y dos días. b) Marta: 20/53 Susana: 18/53 Claudia: 15/53

▶46 Un grifo puede llenar un tanque funcionando solo, durante 6 horas.

a) ¿Qué parte del tanque llenará en una hora? 1/6 del tanque. b) ¿Y en 2 horas? 1/3 del tanque.
c) ¿Qué sucede si la dejamos abierta toda la noche (8 horas)?

Como al cabo de 6 horas ya está llena, el resto del tiempo el agua desborda.

d) Si al cabo de 4 horas, aún faltan 400 litros para llenar el tanque, ¿qué capacidad tiene el tanque? 1200 litros.

Para saber hacer

Operaciones y propiedades

Las operaciones entre números racionales tienen las mismas propiedades que entre números enteros, pero además puede agregarse que en la multiplicación de racionales todo número racional $\frac{a}{b} \neq 0$ tiene su inverso b/a de modo tal que $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$.

Recordemos que al sumar racionales con el mismo denominador, por ejemplo:

$$\frac{1}{5} + \frac{2}{5} \text{ obtenemos } \frac{3}{5} \text{ es decir } \frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{(a+c)}{b}$$

Si los denominadores son diferentes, buscamos fracciones equivalentes a las dadas pero con el mismo denominador.

$$\text{Por ejemplo: } \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$$

Lo mismo ocurre con la resta.

Para multiplicar fracciones, lo hacemos del siguiente modo:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}, \text{ por ejemplo } = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{10}{21}$$

También, si es posible, simplificamos para que los cálculos sean más sencillos.

$$\frac{\overset{3}{\cancel{15}}}{\underset{2}{\cancel{4}}} \cdot \frac{\overset{3}{\cancel{6}}}{\underset{1}{\cancel{8}}} = \frac{9}{2}$$

para dividir $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ (con $\frac{c}{d} \neq 0$) hacemos $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$



Porcentaje

Analiza la siguiente situación.

María Eugenia y Sergio son un matrimonio moderno. Ambos trabajan y tratan de compartir las tareas de la casa. Por ejemplo, con los almuerzos y las cenas de lunes a viernes se organizaron del siguiente modo: María Eugenia cocina el almuerzo de lunes a jueves y la cena el miércoles, mientras que Sergio cocina la cena los martes y jueves. El resto de los días compran comida hecha.

¿Qué parte de las comidas de la semana (sin considerar el sábado y el domingo) cocina cada uno?

¿Qué porcentaje de los días compran comida hecha?

Los porcentajes nos acompañan en nuestra vida diaria, en innumerables ocasiones.

En los diarios, leemos que el porcentaje de desocupados aumentó un 15%. Nos aseguran que la población mundial creció un 3% en la última década. Los precios de los pantalones bajaron un 20% por la liquidación de fin de temporada.

Pero ¿qué significan el 15%, el 3%, el 20%? En principio, es importante tener presente que estos números indican una fracción, el 15% es la fracción $\frac{15}{100}$, el 3% es $\frac{3}{100}$ y el 20% es $\frac{20}{100}$. Es decir, cuando decimos que el índice de desocupación es del 15% estamos indicando que de cada 100 personas en edad de trabajar hay 15 que no consiguen trabajo.

¿Cómo hallar qué porcentaje es un número de otro? Supongamos que sabemos que una persona efectuó la cuarta parte del trabajo que tenía pendiente, ¿qué porcentaje del mismo ha realizado? Bastará con buscar la fracción equivalente a $\frac{1}{4}$ con denominador 100.

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{25}{25} = \frac{25}{100} = 25\%$$

Es decir, lleva realizado el 25% de su trabajo.

Si no existe una fracción equivalente con denominador 100, por ejemplo, si la persona hubiese efectuado $\frac{1}{3}$ del trabajo, lo resolvemos teniendo en cuenta que el porcentaje es una situación de proporcionalidad directa.

$$\begin{array}{l} \frac{3}{3} \text{ ————— } 100\% \\ \frac{1}{3} \text{ ————— } x\% = \frac{1}{3} \cdot 100\% \Rightarrow x = 33,3\% \end{array}$$

Con respecto al problema de María Eugenia y Sergio, en el transcurso de una semana hay 10 comidas (5 almuerzos y 5 cenas); María Eugenia cocina exactamente 5 veces de 10, o sea $\frac{5}{10}$. Sergio lo hace 2 veces de 10, o sea $\frac{2}{10}$. Comen afuera o compran comida 3 veces de 10, o sea $\frac{3}{10}$. Para saber qué porcentaje de veces compran comida, buscamos la fracción equivalente a $\frac{3}{10}$ con denominador 100.

$$\frac{3}{10} = \frac{3 \cdot 10}{10 \cdot 10} = \frac{30}{100}$$

O sea, el 30% de las veces compran comida hecha.

Actividades



►47 Calcula los siguientes porcentajes:

- a) El 3% de 5400. b) El 18% de 6800. c) El 124% de 1300.

►48 En cada caso, calcula cuál es el 100%, si:

- a) El 3% es 1400. b) El 12% es 3500.
- c) El 5% es 7000.

►49 ¿Cuál fue el porcentaje de descuento que nos

han efectuado, si el precio original era \$ 32 y hemos abonado \$ 28? 12,5%.

►50 Compramos una botella de jugo para disolver con agua. Las proporciones son las siguientes: "1 vaso de jugo sin diluir + 4 vasos de agua", ¿qué porcentaje de agua tiene la mezcla?

80%.



►51 El volumen de un cubo se calcula del siguiente modo: volumen = arista. arista. arista. Si cada una de las aristas del cubo dibujado se divide a la mitad, ¿cuántas veces entra el nuevo cubo en el original?, ¿qué parte del volumen original tiene el nuevo cubo?

- a) 8 veces. b) 1/8

►52 Jorge es docente. Para ir a la escuela Técnica del Sur toma 2 colectivos diariamente de ida y otros dos para la vuelta. Saca un boleto de \$ 1,20 y otro de \$ 0,65. Los martes, miércoles y viernes vuelve a su casa y sale hacia la escuela Media del Norte. Para llegar a la misma toma el trole (ficha \$ 0,60) ida y vuelta. Si su sueldo es de \$ 1600, ¿qué porcentaje del mismo gasta en viáticos?



5,525%.

►53 Juan recibe todos los meses una mensualidad de \$ 40. Su padre le ha dicho que en adelante recibirá un 20% menos, pues se han incorporado gastos extras. Pasaron 6 meses y Juan reclama a su padre. Este le asegura que le aumentará el 20% de la mensualidad actual. ¿Recibirá más, menos o igual cantidad de dinero que hace 6 meses?

Recibirá \$1,60 menos.



Un triángulo equilátero tiene 27 cm de perímetro. Se quiere dibujar un triángulo isósceles cuya base sea el 10% más larga que la del triángulo equilátero, pero que el perímetro sea el mismo.

- a) ¿En qué porcentaje varía la altura respecto de la altura original? _____
- b) ¿Son iguales las áreas? _____



Sucesión de Fibonacci

Analiza la siguiente situación.

En las grandes tiendas Fibonacci pusieron en marcha un nuevo plan de créditos.

Un vestido de \$ 47 se paga en 10 cuotas del siguiente modo:

Primera cuota: \$ 1

Segunda cuota: \$ 1

Tercera cuota: 1ra. cuota + 2da. cuota

Cuarta cuota: 2da. cuota + 3ra. cuota

Y así sucesivamente hasta llegar a la décima.

¿Cuánto se paga en cada cuota?

¿Qué porcentaje de recargo tiene el precio final con respecto al original?

Si calculamos el precio de cada cuota tendremos la siguiente sucesión:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
\$1	\$1	\$2	\$3	\$5	\$8	\$13	\$21	\$34	\$55

¡La décima cuota es más alta que el precio original!

Y la cifra total que se paga por el vestido es \$ 143.

Se pagó un recargo de \$ 143 - \$ 47 = \$ 96.

Para saber qué porcentaje es 96 de 47 podemos plantear:

$$\begin{array}{l} 47 \text{ ————— } 100\% \\ 96 \text{ ————— } x \end{array} \Rightarrow x = \frac{96 \cdot 100}{47} \cong 204,26\%$$

¡Las ofertas de Fibonacci no son muy recomendables!

Este listado de números que puede seguir armándose con la misma estrategia (los dos primeros son unos y a partir del tercero cada término es la suma de los dos anteriores) es una sucesión creada por Leonardo de Pissa, más conocido como Fibonacci, uno de los más célebres matemáticos del siglo XIII.

Parece solo una curiosidad pero tiene en realidad propiedades muy interesantes.

Aparece a cada momento en la naturaleza y en el arte.

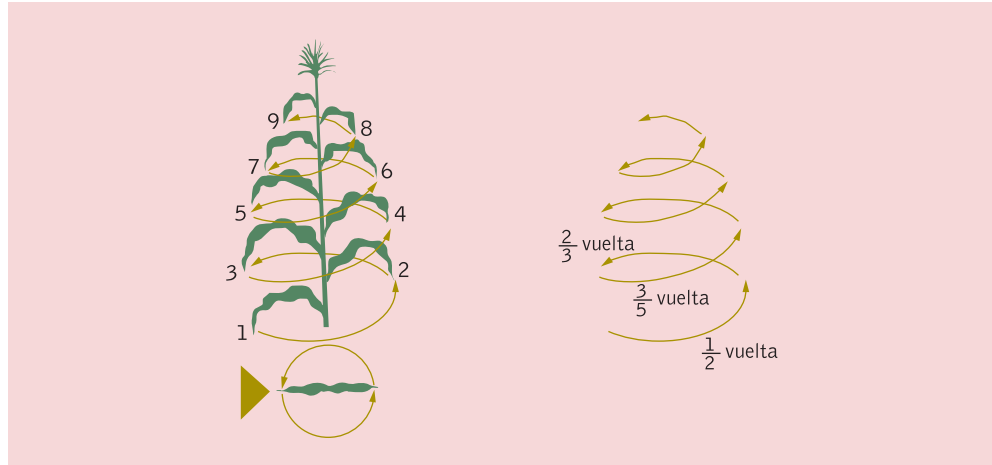
Si miran con atención las escamas de una piña, podrán ver que aparecen en espiral alrededor del vértice. Cuenten el número de espirales y van a comprobar que siempre es un número de la secuencia de Fibonacci.

Si dividimos cada uno de los números de Fibonacci por el número que le sigue en la sucesión obtenemos esta secuencia de fracciones.

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}, \frac{34}{55}$$

Estas fracciones describen el crecimiento de muchas plantas. Cuando nacen hojas nuevas en una planta, estas se van acomodando en espiral alrededor del tallo.

La espiral va girando de abajo hacia arriba.

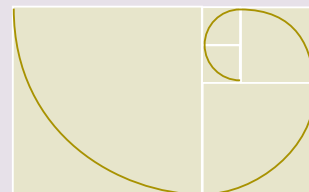
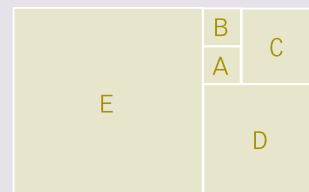
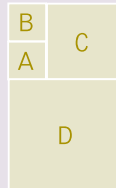
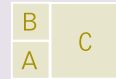


De una hoja a la otra, recorriendo la espiral, hay una fracción de la vuelta completa. Esas fracciones siguen la secuencia de las fracciones de Fibonacci. Las mismas describen las espirales que forman las hojas de las plantas cuando brotan del tallo. Esta distribución permite que los rayos del sol se filtren hasta las hojas más bajas.

Para saber hacer

Construcción de la espiral

- 1) **Construye** un cuadrado A de 1 cm de lado y **añádele** uno igual, B, para formar un rectángulo de 2 x 1.
- 2) **Añade** luego un cuadrado C, de lado 2, como muestra la figura formando un rectángulo de lado 3 x 2.
- 3) **Agrega** un cuadrado de dimensiones 3x3 (D) de forma tal que el nuevo rectángulo sea 5 x 3.
- 4) **Agrega** un cuadrado E de 5 x 5 y así sucesivamente.



Puedes hacerlo sobre papel cuadrículado y continuar tanto como el papel lo permita. Con compás **construye** cuartos de círculos en cada cuadrado.

Los lados de los cuadrados que se van agregando forman la sucesión de Fibonacci: 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; ...

Actividades

► **54** **Construye** una sucesión donde los primeros términos son 1;1 y luego cada uno se obtiene como diferencia entre los dos anteriores.

1; 1; 0; -1; -1; 0; 1; 1; 0; -1; -1; 0; 1; 1; 0; ...

► **55** Una máquina electrónica pierde año a año una tercera parte de su valor. **Construye** la sucesión de precios año a año, sabiendo que su precio inicial es de \$ 3500.

\$3500; \$2333,33; \$1555,55; \$1037,03; ...

► **56** **Descubre** una ley de formación de esta sucesión y **agrega** tres términos:


$$\frac{1}{2}; \frac{1}{5}; \frac{1}{10}; \frac{8}{17}$$

1/2 ; 1/5 ; 1/10; 1/17; 1/26; 1/37; 1/50; ... La ley de formación es:

1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; ... $11 + 1^2 + 1^3 + 1^4 + 1^5 + 1$

► **57** Una persona tiene ahorrado en el banco \$ 80 000. Todos los años gasta el 10% de lo que quedaba el año anterior. **Construye** la sucesión de lo que tiene ahorrado año tras año.

\$80.000; \$72.000; \$64.800; \$58320; \$52498; \$47.239,20; ...

► **58** **Descubre** una ley de formación para cada una de las sucesiones siguientes e **indica** qué término debe ubicarse en el décimo lugar. 

a) 14; $\frac{29}{2}$; 15; $\frac{31}{2}$; 16; El primer término es 14, y cada uno de los siguientes, se forma

sumando 1/2 al anterior. 14; 29/2 ; 15; 31/2 ; 16; ...

b) 2; -6; 18; -54; El primer término es 2; cada uno de los siguientes se forman multiplicando

por (-3) el anterior. 2; -6; 18; -36; 54; -162; 486; -1458; 4374; -13122; ...

c) 1; 1; 1; 3; 5; 9; 17; ... Los tres primeros términos son unos. Cada término, a partir del 4to.,

es igual a la suma de los tres anteriores. 1; 1; 1; 3; 5; 9; 17; 31; 57; 105; ...

► **59** Un papel de 0,1 mm de grosor se dobla por la mitad y nuevamente por la mitad y así sucesivamente. **Escribe** la sucesión de grosores empezando por el primer doblez.

0,2; 0,4; 0,8; 1,6; 3,2; 6,4; 12,8; ...

► **60** La siguiente sucesión está armada a partir de su cuarto término. **Encuentra** los tres primeros y el octavo.

$$3; \frac{11}{4}; \frac{5}{2}; \frac{9}{4}$$

Cada término se obtiene restando 1/4 al término anterior. 15/4 ; 7/2 ; 13/4 ; 3; 11/4 ; 5/2; 9/4; 2; 7/4 ; 3/2

Sucesiones y leyendas

Existe una leyenda muy conocida acerca de la creación del juego de ajedrez, según la cual un rey hindú encargó a uno de sus súbditos algún entretenimiento para sus largas horas de ocio. Este inventó el juego del ajedrez, tal como lo conocemos hoy.

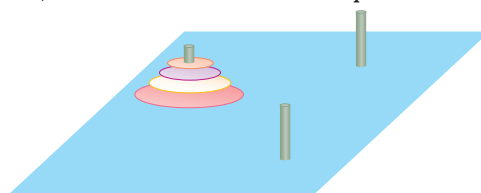
El rey estuvo tan agradecido que le ofreció la recompensa que él solicitara. Sissa, el gran inventor, contestó: “Majestad, dadme un grano de trigo por el primer cuadrado del tablero, 2 por el segundo, 4 por el tercero, 8 por el cuarto y así sucesivamente hasta llegar al casillero 64 que completa el tablero”.

Al rey le pareció casi ofensivo un pedido tan humilde, pero al resolver los cálculos obtuvo la siguiente sucesión que describe la cantidad de granos de trigo en cada casilla: 1; 2; 4; 8; 16; 32; 64; ...

Si sumamos todos los granos de trigo que pidió Sissa como recompensa, obtenemos esta cifra que resulta impagable:

18 446 744 073 709 551 615 granos de trigo.

Otra leyenda famosa en la que también intervienen las sucesiones está vinculada con la Torre de Hanoi. Este es un juego que consiste en una tabla con 3 clavijas y un número de discos de distintos tamaños, ubicados de tal manera que el disco mayor quede abajo y los demás se superpongan en tamaños decrecientes, hasta llegar al más pequeño.



El juego consiste en traspasar todos los discos a otra clavija moviendo solo uno por vez, pero de modo que en ninguno de los movimientos quede uno más pequeño debajo de uno más grande.

Nº de discos	1	2	3	4	5
Cant. mínima de pasos	1	3	7	15	31

La leyenda vinculada con este juguete cuenta que en el gran templo de Benarés, debajo de la cúpula que marca el centro del mundo, hay una placa de bronce con 3 clavijas de diamante. Dios colocó 64 discos de oro de mayor a menor diámetro en una de las clavijas.

Estos forman la llamada Torre de Brahma. Día y noche los sacerdotes traspasan los discos de una aguja a la otra siguiendo las reglas del juego mencionadas antes. Cuando los 64 discos hayan sido traspasados de esta manera el mundo desaparecerá.

El número de traspasos requeridos para cumplir la profecía es el mismo que el de la cantidad de granos de trigo de la leyenda del ajedrez. Si los sacerdotes hiciesen un traspaso por segundo durante las 24 horas diarias los 365 días del año, terminar el trabajo les llevaría algo más de 584 942 417 355 años, siempre y cuando no cometan ningún error que anule el trabajo realizado.



Fibonacci en la naturaleza
<https://bit.ly/M10U1p34>



Repaso

► 1 ◀ **Decide** cuáles de las siguientes magnitudes son directamente o inversamente proporcionales. **Justifica** la elección.

- a) El tiempo de recorrido de un automóvil y la velocidad del mismo.
- b) La edad de un niño con su altura.
- c) La cantidad de figuritas compradas con el precio de cada paquete.
- d) La longitud del lado del cuadrado y su perímetro.
- e) El tiempo que tarda un grifo en llenar una pileta y el volumen de la pileta.
- f) La distancia recorrida en un colectivo con el precio del boleto.

Magnitudes directamente proporcionales: c, d y e. Inversamente: a. No son de proporcionalidad: b y f.

► 2 ◀ En el letrero de una farmacia aparece el siguiente cartel:

DESCUENTO A JUBILADOS
70% + 40%

¿Qué intentan decir? ¿Son gratis los medicamentos? ¿Cuánto deberá abonar un jubilado un jarabe para la tos que cuesta \$ 34?

Significa que sobre el precio que debería abonar el jubilado, luego de hecho el

descuento del 70%, le efectúan un nuevo descuento, esta vez del 40%.

► 3 ◀ **Indica** cuáles de las siguientes propiedades son correctas en Q pero no en Z: c y e.

- a) $(12 - 4 + 36) : (-2) = 12 : (-2) - 4 : (-2) + 36 : (-2)$
- b) $\sqrt{25} \cdot \sqrt{4} = 100$
- c) $8 : 3 + 4 : 3 = (8 + 4) : 3$
- d) $-3 \cdot (2 + 6 + 11) = -6 - 18 - 33$
- e) $(15 + 5) : 4 = 15 : 4 + 5 : 4$

► 4 ◀ En el mercadito "Don Antonio" venden las gaseosas a estos precios:

$\frac{1}{2}$ litro en botella de vidrio	\$ 0,94
Latita de 350 cm ³	\$ 1
1 litro y cuarto en botella de plástico	\$ 1,57
2 litros y cuarto en botella de plástico	\$ 1,98

¿Qué medidas **elegirías** si necesitan 10 litros? ¿Cuál de todas las medidas resulta más económica?

4 botellas de dos litros y cuarto, y una de un litro.

► 5 ◀ Una pileta de natación tarda en llenarse 12 horas, con el grifo abierto totalmente.

- a) ¿Qué parte de la pileta se llena por hora? $\frac{1}{12}$
- b) ¿Al cabo de cuántas horas está llena $\frac{3}{4}$ de la misma? Al cabo de 9 horas.
- c) Si además se abre otro grifo que llena $\frac{1}{24}$ de pileta por hora, ¿en cuánto tiempo se llena la pileta? En 8 horas.



6 Alberto es un conocido novelista de historias policiales. En tres meses debe entregar los borradores de su último libro. Si en el primer mes escribe $\frac{3}{7}$ del total y al segundo mes la tercera parte de lo escrito en el primero, ¿qué parte del libro le queda para el tercer mes?

$\frac{3}{7}$

7 En el matutino La Luna aparece todos los días el nivel de contaminación de la Capital. El máximo tolerable es de 9 ppm (partes por millón).

Los niveles de la última semana fueron de:

Lunes	9,2 ppm	Martes	9,5 ppm
Miércoles	8,1 ppm	Jueves	6,4 ppm
Viernes	9,5 ppm	Sábado	11,2 ppm
Domingo	8,7 ppm		

¿El promedio de la semana fue mayor o menor al máximo tolerable?

El gobierno implementó un plan de reducción de residuos contaminantes que disminuirá en $\frac{1}{12}$ el nivel diario. ¿Qué sucederá con el promedio semanal? (**Verifica** para los datos obtenidos.)

El promedio fue menor. El promedio semanal también descenderá en $\frac{1}{12}$.

8 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = \frac{x}{5} - 4$ $x = -120/19$

b) $2 \cdot (x - 1) - x = (x + 1)^2 - 2x - x^2$ $x = 3$

c) $3 \cdot (x + 4) - \frac{x}{3} = x + \frac{x}{5}$ $x = -90/11$

d) $3(x - 2) \cdot (-3) - 1 = \frac{1}{2}$ $x = 13/8$

e) $-\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = 3 \cdot \left(\frac{x}{2} - \frac{x}{4}\right)$ $x = -8/45$

9 Un cubo mide 8 cm de arista. Se divide a la mitad su arista sucesivamente cuatro veces. ¿En cuántos cubitos queda dividido en cada caso el cubo original? ¿Qué parte del cubo original representa cada cubito en cada división?

En 4096 cubitos de 0,5 cm de arista. El volumen de cada cubito es $\frac{1}{4096}$ del cubo inicial.

10 La fábrica de sándwiches de miga "El amigo" vende planchas cuyo número es múltiplo de 8. Claudia para festejar su cumpleaños número 34 hizo un pedido allí. Si los $\frac{4}{9}$ eran de pan blanco de jamón y queso; $\frac{1}{3}$ se repartieron por partes iguales entre jamón crudo y queso, y jamón y tomate; $\frac{1}{6}$ del total eran de jamón y ananá, y solo quedaron 8 de huevo y queso, ¿cuántos encargó en total y cuántos de cada gusto?

Encargó 144 sándwichs; 64 de jamón y queso, 8 de huevo y queso, y 24 de cada uno de los otros tres gustos.



11 Escribe en lenguaje algebraico cada una de los siguientes enunciados:

a) El doble de un número **c**. $2 \cdot c$

b) El triple de un número **a**. $3 \cdot a$

c) La mitad de un número **p**. $p/2$

d) La cuarta parte de un número **t**. $t/4$

e) El cuadrado de un número **q**. q^2

f) El siguiente de un número entero. $n + 1$



Integración de conocimientos



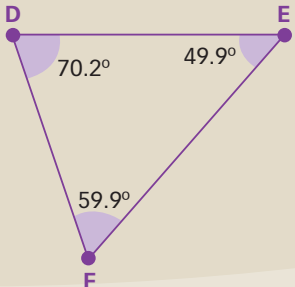
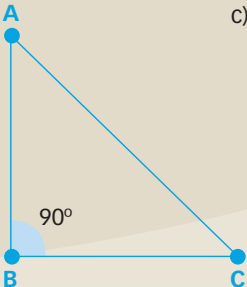
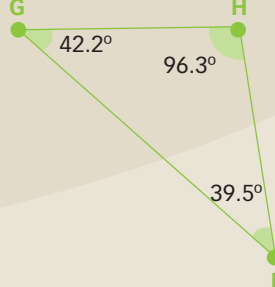
1 Selecciona las fracciones que sean equivalentes.

- a) $\frac{5}{3}$ y $\frac{3}{5}$ b) $\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{6}$
c) $\frac{4}{3}$ y $\frac{8}{6}$ d) $\frac{3}{10}$ y $\frac{12}{40}$

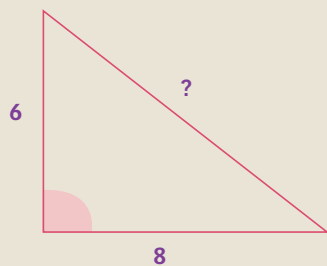
2 Escribe el tipo de número que es cada uno de los siguientes.

- a) -3
b) 10
c) $\frac{1}{4}$
d) $\frac{3}{2}$
e) 3
f) 2,5

3 Selecciona el triángulo rectángulo. Justifica.

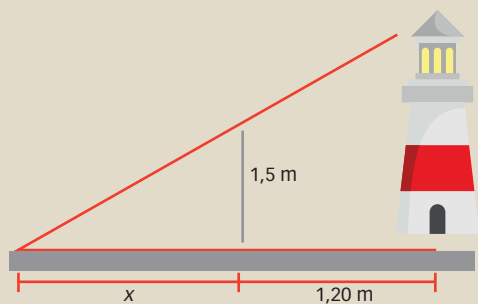
- a) 
- b) 
- c) 

4 Selecciona el valor de la hipotenusa del siguiente triángulo rectángulo.



- a) 10 b) 100
c) 25 d) 14

Integración de conocimientos



5 Al resolver _____, se obtiene:

- a) 1,25 m b) 1,20 m
- c) 1,35 m d) 1,45 m

6 Encuentra la fracción generatriz de:

a) 1,26 =

a) 1,(22) =

7 Resuelve y responde.

a) Juliana necesita 1 litro de leche para terminar un pastel, y tiene un tarro con $\frac{2}{5}$ de litro de leche de soya y medio litro de leche descremada. Si decide mezclar las dos, ¿le sobrará o le faltará leche para terminar el pastel?

le falta $\frac{1}{10}$ de litro de leche para terminar .

b) Para hacer un lazo de un rollo de cinta de tela se tomó primero $\frac{1}{4}$ m del total y luego $\frac{8}{20}$ m. ¿Sobró cinta para otro moño?

sobra $\frac{7}{20}$ m de cinta .



Autoevaluación

- Comprendo que cada conjunto numérico contiene elementos con características similares.

Coevaluación

- Analizamos las características de los números y los agrupamos en los conjuntos a los que pertenecen.

MATEMÁTICA

